TD 6 : Applications, relations - Corrigé partiel

Exercice 5 **1)** On suppose p injective. Montrons que $p = \mathrm{id}_E$. Soit $x \in E$. Comme $p \circ p = p$, on a

$$p(p(x)) = p(x)$$

Ainsi, $p(x)$ et x ont la même image par p. Par injectivité de p, on en déduit que $p(x) = x$.

2) On suppose p surjective. Montrons que $p = \mathrm{id}_E$. Soit $y \in E$. Comme p est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. En appliquant p, on a donc

$$\begin{aligned} p(y) &= p(p(x)) \\ &= p(x) && \text{car } p \circ p = p \\ &= y \end{aligned}$$

Par arbitraire sur y, on a donc $p = \mathrm{id}_E$.

Exercice 9 (partie 2) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}(f(A))$. Par la caractérisation, on a :

$$x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A)$$

Il suffit donc de montrer que $f(x) \in f(A)$. Mais cela est évident car $x \in A$ et que

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Ainsi, $x \in f^{-1}(f(A))$. Par arbitraire sur x, on a l'inclusion.

Exercice 11 **1)** La rotation de centre $1+i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ correspond à

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} \rho(z) &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z-(1+i)) + (1+i) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} z + (1+i)\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} z + (1+i)\left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} z + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$